

1. Введение

Термин «неголономная система» в механику ввел Г. Герц. Так называются материальные системы, стесненные связями, которые налагают ограничения на скорости точек системы, но не ограничивают положение (конфигурацию) системы.

Более точно. Пусть в области $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ заданы m векторных полей X_1, \dots, X_m . Координаты каждого из векторов X_i обозначаются $\xi_i^1(x_1, \dots, x_n), \dots, \xi_i^n(x_1, \dots, x_n)$ и предполагаются непрерывно дифференцируемыми функциями до k -го порядка включительно. Каждому вектору X_i сопоставим оператор

$$X_i = \xi_i^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \xi_i^n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Траектории каждого такого оператора X_i определяются дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_1}{dt_i} = \xi_i^1(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{dx_n}{dt_i} = \xi_i^n(x_1, \dots, x_n),$$

где t_i — параметр, к которому отнесены траектории оператора X_i .

В n -мерной области G в каждой точке векторы X_i образуют m -мерное направление. Поле этих m -мерных направлений называется вполне неголономным, если система дифференциальных уравнений с частными производными

$$X_1 f = X_2 f = \dots = X_m f = 0,$$

где $f(x_1, \dots, x_n)$ — искомая функция, имеет только тривиальное решение $f \equiv \text{const}$. Как известно, для этого достаточно, чтобы среди операторов X_1, \dots, X_m и полученных из них составлением коммутаторов (нагромождая коммутаторов друг на друга, если требуется) нашлись n линейно независимых операторов во всех точках области G .

Пусть операторы X_1, \dots, X_m порождают неголономное поле m -мерных направлений в области G . Тогда из любой точки области G можно попасть в любую другую точку этой области, смещаясь конечное число раз по траекториям операторов X_1, X_2, \dots, X_m .

Неголономные связи возникают в системах с качением твердых тел по поверхностям без скольжения. В качестве примеров в данном пособии будут описаны 4 задачи неголономной динамики, реализованные в программном комплексе Chaos: качение параболоида по плоскости, качение эллипсоида по плоскости, качение шара по параболоиду и качение шара по эллипсоиду.

Программный комплекс Chaos создан с помощью кроссплатформенного инструмента разработки программного обеспечения Qt, что обеспечивает совместимость комплекса со всеми популярными операционными системами такими как Windows, Linux, Mac и др. Большинство алгоритмов в комплексе реализуют высокоэффективные, вычислительные методы. В частности, работа комплекса основана на многопоточном подходе (реализованном с помощью функциональности Qt), который приводит к тому, что распараллеливание сложных и трудоемких вычислений в пакете достигается автоматически.

Разработанный программный комплекс построен на модульной основе. В результате чего в нем может быть реализована и исследована практически любая динамическая система (не только неголономная) описываемая конечномерной системой дифференциальных уравнений. При этом не требуется переделывать весь комплекс в целом, необходимо лишь написать дополнительные модуль описывающий конкретную задачу. При этом все методы исследования уже включенные в комплекс, будут доступны для исследования новой задачи. Модульность

комплекса затрагивает не только исследуемые задачи, но и инструменты, и методы интегрирования. В частности, естественным образом можно написать новый инструмент для исследования конкретной задачи. После чего данный инструмент автоматически можно будет использовать в любой задаче для которой он имеет смысл. Набор методов интегрирования также является легко расширяемым. Для включения нового метода интегрирования достаточно написать одну функцию стандартного вида, после чего во всех задачах появится возможность использования нового метода.

В первой главе описывается структура программного комплекса Chaos, общая идеология работы с ним. Перечисляются и описываются возможности комплекса по изучению динамических систем и используемые при этом методы исследования. Вторая глава посвящена описанию и исследованию конкретным задач в привязке к программному комплексу Chaos.

2. Описание программного комплекса Chaos

Приведем сначала краткое описание интерфейса программного комплекса. При запуске программы перед пользователем появляется три основных окна. Первое — управляющее окно в котором происходит выбор задачи, метода интегрирования и инструмента. На первой закладке управляющего окна (см. рис. 1 - первое окно) происходит выбор метода интегрирования и задание параметров метода (шаг интегрирования и пр.). На второй закладке (см. рис. 1 - второе окно) производится выбор задачи и задание параметров задачи. На третьей закладке производится выбор инструмента или фильтра, задание его параметров и запуск (см. рис. 1 - третье окно). Набор инструментов специфичен для каждой задачи и определяются при написании модуля задачи. Все инструменты для конкретной задачи организованы в виде древовидного списка для естественного отображения функциональной зависимости инструментов.

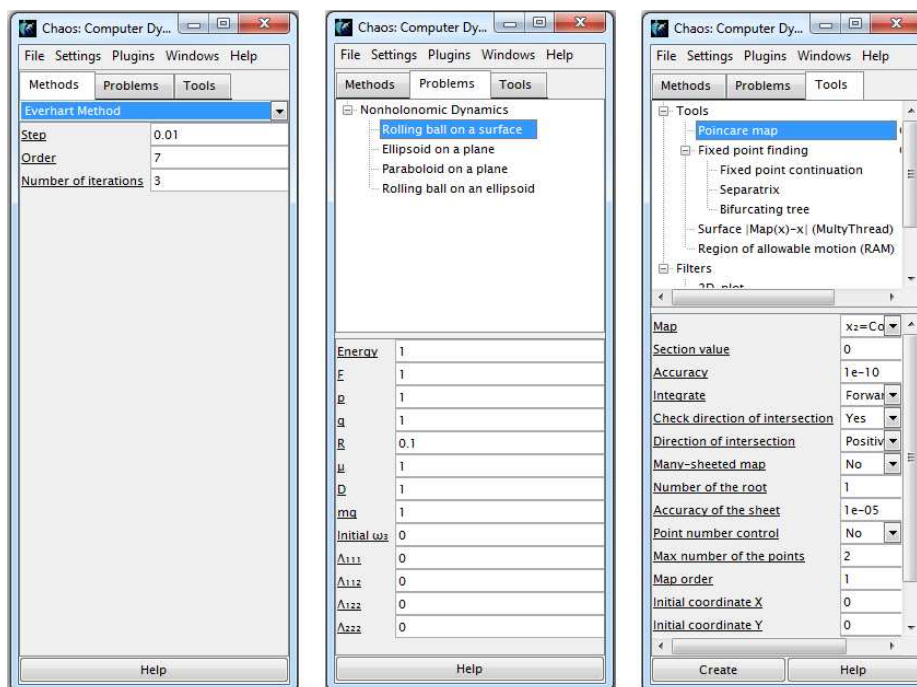


Рис. 1. Вкладки управляющего окна.

2.1. Менеджер запущенных инструментов

Второе окно — менеджер запущенных инструментов. В верхней части менеджера отображается список созданных экземпляров инструментов выбранной задачи (см. рис. 2). Список формируется в виде древовидной структуры аналогично списку инструментов задачи. В отличие от списка самих инструментов, экземпляров одного и того же инструмента может быть произвольное количество (например несколько экземпляров фазовых траекторий с разными начальными условиями). При выделении какого-либо экземпляра инструмента в средней части окна менеджера выводится его техническая информация включая параметры задачи и параметры инструмента. Каждый экземпляр инструмента запускается отдельным потоком, таким образом можно запустить сразу несколько инструментов для параллельного вычисления. Запущенные в текущий момент экземпляры при этом отображаются красным цветом. Также менеджер предоставляет пользователю возможность останавливать (кнопки *Stop/Stop All*), запускать (*Start*), перезапускать (*Restart*), удалять (*Delete/Delete All*) выделенный экземпляр инструмента или группу инструментов и выбирать цвет вывода в графическое окно. Кнопка *Edit properties* позволяет в момент, когда инструмент остановлен, поменять параметры метода, задачи или инструмента и продолжить работу инструмента с новыми параметрами с точки остановки. Кнопка *Set range* используется для задания выборки точек, которую следует отображать в окне инструмента. Кнопка *Find parent* позволяет у выделенного инструмента найти родительский.

Третье окно — окно отображения Пуанкаре текущей задачи (см. рис. 3). При запуске программы текущей задачей является последняя открытая задача в предыдущем сеансе работы. В этом окне происходит вывод отображения Пуанкаре и графической информации других инструментов. При выделении конкретного экземпляра инструмента в окне менеджера вся графическая информация связанная с этим экземпляром подсвечивается красным цветом. Также, в данном окне с помощью мыши естественным образом производится запуск инструментов построения отображения и поиска неподвижных точек.

2.2. Методы интегрирования

Пользователю доступно три метода численного интегрирования динамических систем:

- Метод Рунге-Кутты
- Метод Мерсона
- Метод Эверхарта

2.2.1. Метод Рунге-Кутты (Runge-Kutt method)

Одношаговый метод интегрирования четвертого порядка с постоянным шагом. Один из наиболее часто применяемых методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Параметры метода

- *Step (double)* - Данный параметр задает постоянный шаг интегрирования метода.

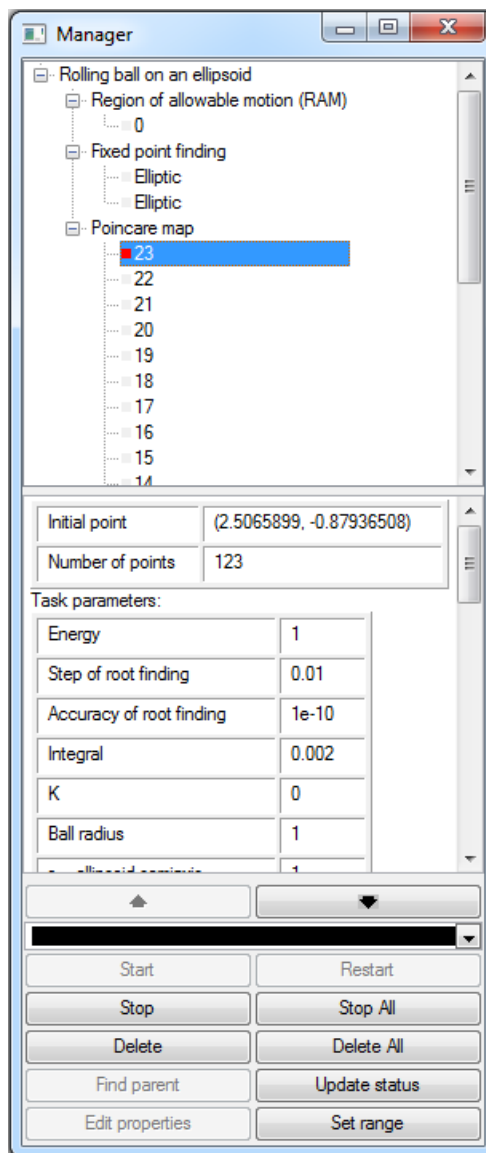


Рис. 2. Менеджер запущенных инструментов.

2.2.2. Метод Мерсона (Merson method)

Одношаговый метод интегрирования четвертого порядка с изменяющимся шагом. Шаг интегрирования автоматически изменяется в зависимости от текущей величины локальной ошибки усечения. Локальная ошибка усечения обусловлена отбрасыванием слагаемых высокого порядка (в данном случае выше четвертой степени) при разложении дифференциальных уравнений в окрестности текущей точки. Для исключения зацикливания, промежуток изменения шага интегрирования задается параметрами метода.

Параметры метода

- *Step (double)* - Данный параметр определяет начальный шаг интегрирования. От его величины зависит только несколько первых шагов интегрирования. При дальнейшем интегрировании величина шага изменяется в зависимости от текущего состояния системы и

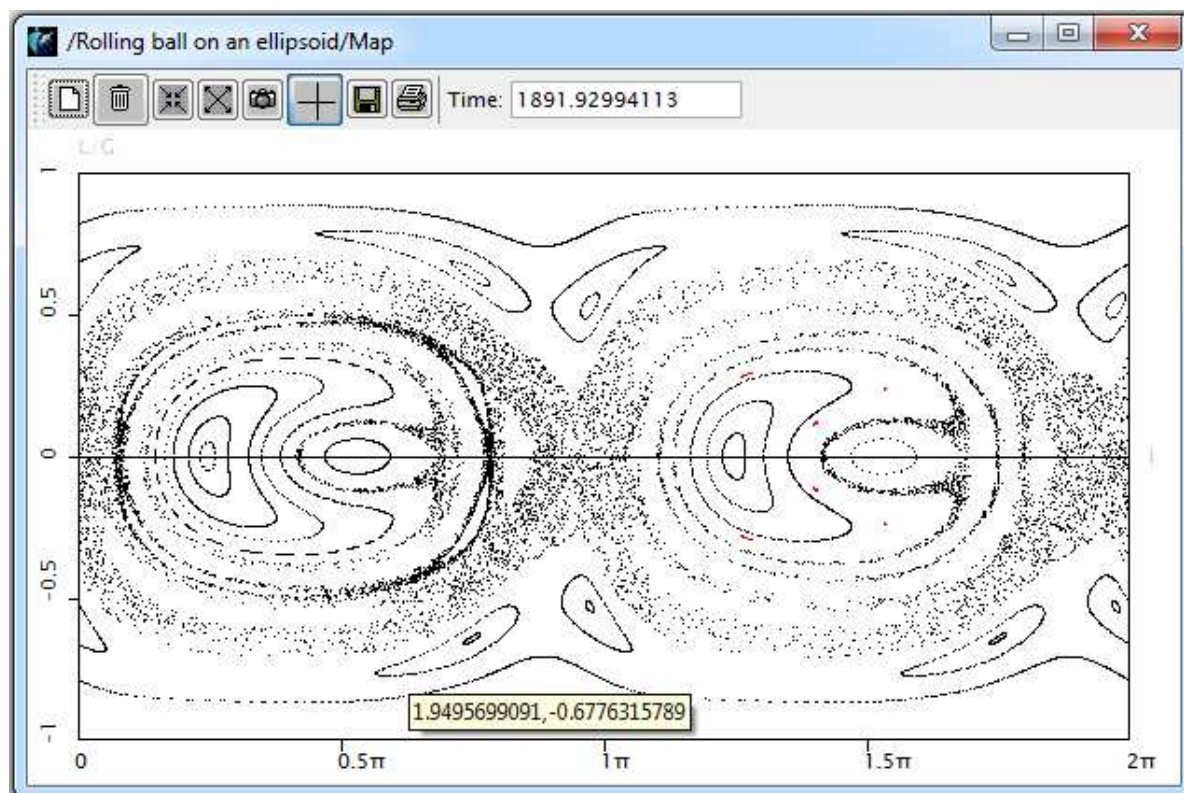


Рис. 3. Отображение Пуанкаре.

не зависит от начального значения. Величина параметра должна лежать в промежутке от *Min.step* до *Max.step*.

- *Precision (double)* - Данный параметр определяет требуемую величину локальной ошибки усечения. Если на текущем шаге локальная ошибка усечения больше заданной величины, то шаг интегрирования уменьшается, иначе — увеличивается. Заметим, что данный параметр играет управляющую роль, и на произвольном шаге локальная ошибка усечения не обязательно будет меньше его значения.
- *Min. step (double)* - Минимальное значение шага интегрирования.
- *Max. step (double)* - Максимальное значение шага интегрирования.

2.2.3. Метод Эверхарта (Everhart method)

Метод Эверхарта является неявным одношаговым методом. В данной реализации порядок метода задается одним из параметров и может принимать значения 3, 7, 11, 15, 19, 23 и 27. В основе метода лежит аппроксимация правой части дифференциальных уравнений на сегменте, длина которого равна шагу интегрирования, алгебраическим интерполяционным многочленом и последующее его интегрирование.

Параметры метода

- *Step (double)* - Данный параметр задает постоянный шаг интегрирования метода.

- *Order (int)* - Данный параметр определяет порядок метода и может принимать значения 3, 7, 11, 15, 19, 23 и 27. Если значение параметра не равно ни одному из этих чисел, то в качестве порядка метода берется наибольшее значение из перечисленного выше списка меньшее, чем введенное число.
- *Number of iterations (int)* - Данный параметр задает количество точек на сегменте равном шагу интегрирования, по которым производится интерполяция правой части дифференциальных уравнений.

2.3. Инструменты

Программный комплекс предоставляет пользователю набор инструментов для исследования динамических систем. Приведем иерархию инструментов, доступных в комплексе:

- Отображение Пуанкаре
 - Спектр Фурье
 - Ляпуновские показатели для потока
- Поиск неподвижных точек отображения
 - Продолжение неподвижных точек по параметру
 - Сепаратрисы
 - Дерево бифуркаций удвоения периода
- Построение поверхности $z = |Map(x) - x|$
- Области возможного движения (ОВД)
- Бифуркационные диаграммы

Отображение Пуанкаре является основным инструментом исследования задач. Остальные инструменты, как правило, используются для изучения уже получившегося точечного отображения.

Также стоит отметить что инструменты Спектр Фурье и Ляпуновские показатели для потока являются вспомогательными по отношению к Отображению Пуанкаре, а Продолжение неподвижных точек по параметру, Сепаратрисы и Дерево бифуркаций удвоения периода - вспомогательными по отношению к Поиску неподвижных точек по параметру. Чтобы использовать инструмент для исследования задачи сначала необходимо выбрать задачу на вкладке **Problems** в основном окне программы и задать параметры задачи (нижняя половина основного окна). Затем перейти на вкладку **Tools** щелчком мыши выбрать нужный инструмент, задать параметры инструмента и нажать кнопку **Create** в нижней части окна. Инструменты являются запускаемыми модулями и при их старте создается новый вычислительный поток, который отображается в окне менеджера. Используемые в пакете программ инструменты можно разделить на два типа: базовые и зависимые. Базовыми инструментами отвечают за создание точечного отображения той или иной природы. Это может быть простое точечное отображение, отображение Пуанкаре или фазовый поток. Все другие (зависимые) инструменты как правило используются для изучения уже получившегося точечного отображения. Например, инструмент поиска неподвижных точек — ищет неподвижные точки отображения, при этом не важно какую природу изначально имеет само отображение.

2.3.1. Отображение Пуанкаре (Tools/Poincare map)

Данный инструмент предназначен для построения отображения Пуанкаре динамической системы. Отображение Пуанкаре строится на пересечении изоэнергетического уровня и некоторой гиперплоскости (плоскости сечения) в фазовом пространстве. Эта гиперплоскость обычно задается как условие постоянности некоторой фазовой переменной, которую мы назовем переменной сечения. Сечение изоэнергетического уровня гиперплоскостью в общем случае представляет собой некоторую поверхность, которую в дальнейшем мы будем называть поверхностью уровня энергии. Нарисовать эту поверхность для двумерного отображения Пуанкаре можно с помощью инструмента Построение ОВД. Для построения отображения Пуанкаре поверхность уровня энергии проецируется в некоторое пространство фазовых переменных, которые мы будем называть координатами отображения Пуанкаре, а само пространство — пространство отображения Пуанкаре. В общем случае поверхность уровня энергии проецируется в пространство отображения Пуанкаре неоднозначно. Таким образом, одним и тем же координатам отображения Пуанкаре могут соответствовать несколько точек на поверхности уровня энергии. В этом случае отображение Пуанкаре становится многостраничным. Тогда в случае значения *yes* параметра *Many-sheeted map* с помощью параметра *Number of the root* выбирается номер листа. А в случае значения *no* - параметр *Number of the root* определяет номер листа только начальной точки, а во время счета отображаются точки, попадающие на любой из листов.

Построение отображения Пуанкаре основано на выводе точек пересечения фазовой траектории на заданном уровне энергии с плоскостью сечения. Фазовая траектория системы рассчитывается с помощью численного интегрирования уравнений движения. Точки пересечения фазовой траектории с плоскостью сечения ищутся методом деления пополам отрезка соединяющего две последовательные точки траектории, расположенные по разные стороны плоскости сечения. Найденные точки пересечения выводятся на экран в зависимости от принадлежности их к заданному листу отображения и направления пересечения плоскости сечения фазовой траекторией. Последнее условие исключает дублирование информации об одной и той же траектории на фазовом портрете.

Особенности двумерного отображения. Для двумерных случаев инструмент позволяет строить отображение Пуанкаре на поверхности уровня энергии, которая в этом случае представляет собой некоторую двумерную поверхность (параметр *Draw on energy level*). В случае трехмерного отображения Пуанкаре поверхность уровня энергии является уже трехмерной, поэтому ее построение невозможно.

Особенности трехмерного отображения. Построение трехмерного отображения Пуанкаре, в отличие от двумерного, происходит одновременно в двух окнах. В первом окне (под названием **Map**) строится проекция отображения на горизонтальную плоскость, а во втором (под названием **Map3D**)— полное трехмерное отображение Пуанкаре. Задание первых двух координат для запуска траектории происходит в первом окне, а третья координата всегда задается вручную параметром *Initial coordinate Z*.

Параметры инструмента

- *Map (list)* - Список возможных сечений Пуанкаре данной задачи. (Выбор переменной сечения.)
- *Section value (double)* - Значение переменной сечения. (Выбор конкретной плоскости сечения.)

- *Accuracy (double)* - Точность поиска точки пересечения траектории с плоскостью сечения.
- *Integrate ({forward, backward})* - Направление интегрирования уравнений движений по времени.
- *Check direction of intersection ({yes, no})* - Учитывать(*yes*)/не учитывать(*no*) направление пересечения траекторией плоскости сечения. Если выбрано *yes* отображаются только точки пересекающие плоскость сечения в направлении *Direction of intersection*
- *Direction of intersection ({positive, negative})* - Направление пересечения траекторией плоскости сечения. (Знак производной по времени переменной сечения в точке пересечения).
- *Many-sheeted map ({yes, no})* - Многолистное/однолистное отображение.
- *Number of the root (int)* - Номер листа отображения Пуанкаре.
- *Accuracy of the sheet (double)* - Точность попадания на лист.
- *Draw on energy level ({yes, no})* - Рисовать отображение Пуанкаре на поверхности уровня энергии. (Работает только для двумерных отображений.) *yes* — создается дополнительное окно в котором строится отображение Пуанкаре на поверхности уровня энергии. *no* — отображение Пуанкаре строится только в основном окне.
- *Point number control ({yes, no})* - Ограничение на количество выводимых точек. *yes* — ограничение задается параметром *Max number of the points*. *no* — ограничения нет.
- *Max number of the points (int)* - Количество выводимых точек запущенной траектории.
- *Map order (int)* - Порядок отображения.
- *Initial coordinate X, Y, Z (double)* - Координаты начальной точки траектории. При запуске траектории с помощью мыши данные параметры автоматически принимают значения начальной точки запущенной траектории.
- *Color (color)* - Цвет траектории.

2.3.2. Спектр Фурье (Tools/Poincare map/Furier spectrum)

Данный инструмент позволяет построить спектр Фурье ряда функций (параметр *Function to expand*), зависящих от фазовых переменных, при движении системы вдоль некоторой фазовой траектории. Построение спектра ведется с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье. В качестве траектории может быть выбрана любая уже построенная фазовая траектория. В силу специфики построения спектра Фурье, в качестве метода интегрирования необходимо выбирать метод с постоянным шагом (метод Рунге-Кутты или Эверхарта). Промежуток времени, на котором строится спектр, определяется как произведение шага интегрирования и количества точек на траектории (параметр *Number of iterations*). После построения спектра инструмент определяет гармоники спектра с максимальными амплитудами (в соответствии с параметрами *Number of peaks* и *Min. peak distance*) и выводит информацию о них в информационном окне.

Параметры инструмента

- *Function to expand (list)* - Функция разлагаемая в спектр Фурье.
- *Number of iterations (int)* - Количество точек, в которых вычисляются значения функции. Равно числу шагов интегрирования вдоль траектории.
- *Redraw period (int)* - Количество шагов интегрирования между последовательными расчетами и выводом текущего спектра. На перерисовку спектра тратится достаточно много времени. Поэтому если не важна динамика построения спектра, то для ускорения его построения рекомендуется устанавливать максимальное значение параметра равное *Number of iterations*.
- *Max. frequency (double)* - Максимальное значение частоты выводимых на экран гармоник. Все гармоники с частотой больше данной рассчитываются, но не выводятся.
- *Color (color)* - Цвет выводимого спектра Фурье.
- *Line width (1 pixel, 3 pixels, 5 pixels)* - Ширина столбцов, которыми изображаются амплитуды гармоник.
- *Number of peaks (int)* - Число гармоник с максимальными амплитудами, информация о которых выводится в информационном окне.
- *Min. peak distance (double)* - Минимальное расстояние между двумя максимумами спектра, начиная с которого они интерпретируются, как два разных максимума. То есть если два максимума находятся на расстоянии меньше данного параметра, то они считаются одним максимумом.

2.3.3. Ляпуновские показатели для потока (Tools/Poincare map/Lyapunov exponents for flow)

Описываемый инструмент позволяет вычислять спектр ляпуновских показателей для заданной, исследуемой траектории потока, описывающего динамику исследуемой системы. В качестве исходной траектории выбирается любая траектория отображения Пуанкаре. Для вычисления заданного количества n (параметр *Number of lyapunov exponents*) ляпуновских показателей используется обобщенный алгоритм Бенетина (см. [5]). Совместно с заданной траекторией системы производится интегрирование n вспомогательных траекторий, каждая из которых возмущена на заданную величину (параметр *Initial perturbation*), вдоль ортогональных направлений. Обобщенный алгоритм Бенетина основан на анализе роста (убывания) заданных возмущений вдоль исследуемой траектории. Через равные (заданные параметром *One iteration time*) промежутки времени производится ортогонализация полученных возмущенных векторов по Грамму-Шмидту. Вектора, полученные после ортогонализации, вносят вклад в рассчитываемые ляпуновские показатели, после чего нормируются на значение *Initial perturbation*. При расчете ляпуновских показателей возмущенные траектории не должны выходить из некоторой небольшой окрестности основной. Для предотвращения сильного разбегания возмущенных траекторий процедура ортогонализации и перенормировки может применяться до истечения *One iteration time* при увеличении максимального возмущения до величины, задаваемой параметром *Maximal perturbation*. В процессе вычисления ляпуновских показателей их текущие значения выводятся в менеджер инструментов, а их

зависимость от времени интегрирования исследуемой траектории выводится в виде графика в фильтр **Lyapunov exponent plot**.

Параметры инструмента

- *Number of lyapunov exponents (int)* - количество рассчитываемых ляпуновских показателей.
- *One iteration time (double)* - Время интегрирования между ортогонализацией и нормировками возмущения. Выбирается значительно меньше времени за которое исходная и возмущенная траектории успевают разойтись достаточно далеко.
- *Initial perturbation (double)* - Величина начального малого возмущения траектории. Для корректности расчета ляпуновских показателей начальное возмущение должно быть малым.
- *Maximal perturbation (double)* - Величина максимального возмущения, при достижении которой прерывается текущая итерация (осуществляется ортогонализация и нормализация полученных возмущений).
- *Number of iterations between exponents estimations (int)* - Количество итераций между сравнениями последовательных значений ляпуновских показателей. То есть, при проверке на сходимость, сравниваются значения ляпуновских показателей отстоящие друг от друга на такое количество итераций.
- *Accuracy: distance between previous and current exponents (double)* - Точность совпадения последовательных значений ляпуновских показателей отстоящих друг от друга на *Number of iterations between exponents estimations*.
- *Number of successful comparisons (int)* - Количество удачных сравнений подряд. Критерий остановки расчета ляпуновских показателей по сходимости.
- *Period (double)* - Время между последовательными выводами текущих значения ляпуновских показателей.
- *Should task parameters be renormed (yes, no)* - Практически во всех задачах есть сохраняющиеся величины (интегралы). Наличие n дополнительных интегралов позволяет понизить размерность исследуемой системы на n , а значит количество существенных (ненулевых) ляпуновских показателей так же уменьшается на n . Для того чтобы выкинуть из рассмотрения такие показатели можно нормировать фазовые переменные исследуемой системы таким образом, чтобы интегралы сохранялись с высокой точностью (из-за погрешностей численного счета значения интегралов немного “уплывают” от постоянных значений). За счёт подобной нормировки удастся уменьшить количество существенных ляпуновских показателей на количество интегралов n . При применении нормировки параметр *Number of lyapunov exponents* необходимо устанавливать равным размерности системы $- 1$.
- *T min, T max, Y min, Y max* - диапазоны изменения времени и величины ляпуновских показателей в окне вывода.

2.3.4. Поиск неподвижных точек отображения (Tools/Fixed point finding)

Данный инструмент позволяет находить неподвижные точки (произвольного порядка) как для двух, так и для трехмерных отображений. Алгоритм поиска неподвижной точки отображения порядка n основан на численном поиске нуля вектор-функции $f(\mathbf{x}) = |Map^n(\mathbf{x}) - \mathbf{x}|$. При поиске используются два метода (задается параметром *Method of FP finding*): метод Ньютона, и метод градиентного спуска. Оба метода используются в модификации, для которой расстояние между соседними итерациями поиска ограничено пользователем (параметр *Max. distance between points*).

Особенности двумерных отображений. Кроме поиска неподвижной точки, данный инструмент предоставляет возможность построения поверхности $z = |Map^n(\mathbf{x}) - \mathbf{x}|$ для двумерных отображений. Неподвижные точки являются минимумами этой поверхности с нулевыми значениями z . Построение данной поверхности помогает разобраться в причинах проблем с нахождением неподвижной точки. Одной из распространенных причин является разрыв поверхности вблизи неподвижной точки. Исключение таких разрывов, как правило, связано с необходимостью смены локальных координат. Разрывы связанные с цилиндрической или сферической топологией плоскости отображения можно ликвидировать сдвигом (поворотом) координат отображения по вертикали или горизонтали (параметры *Rotation of the map* соответствующих задач). После построения поверхности, при запуске поиска неподвижных точек методом Ньютона или градиентного спуска траектория поиска будет отображаться и на нарисованной поверхности. В случае построения отображения Пуанкаре не только на плоскости, но и на уровне энергии, траектория поиска и сама неподвижная точка также будут отображаться в окне построения уровня энергии.

Особенности трехмерных отображений. Для трехмерных отображений инструмент предоставляет дополнительную возможность поиска неподвижной точки на двумерной плоскости $z = const$ трехмерного отображения. При этом получаемая после очередной итерации точка проецируется на данную плоскость и в качестве начальной точки для очередной итерации используется уже проекция. Данная возможность применяется для поиска неподвижных точек при наличии их вырождения.

Параметры инструмента

- *Order of FP (int)* - Порядок искомой неподвижной точки.
- *Max. Number of iterations (int)* - Максимальное число итераций, за которое должна быть найдена неподвижная точка. Если за данное число итераций неподвижная точка не найдена, то процесс поиска останавливается с выводом соответствующего сообщения.
- *Accuracy of FP location (double)* - Точность нахождения неподвижной точки. Определяет максимальное расстояние между неподвижной точкой и ее образом.
- *Max. distance between points (double)* - Максимальное расстояние между точками траектории поиска неподвижной точки. Ограничивает резкие скачки в другую область плоскости (пространства) отображения во время поиска.
- *Linear approximation region (double)* - Размер окрестности текущей точки, в которой отображение можно считать линейным. Равен начальному шагу численного дифференцирования. Если при заданном значении производные отображения не удастся найти с нужной точностью (параметр *Accuracy of derivatives finding*), то шаг дифференцирования

уменьшается. Если величина шага уменьшается до значения параметра *Value of “zero”*, то выдается соответствующее сообщение, и вычисления прекращаются.

- *Accuracy of derivatives finding (double)* - Точность численного нахождения производных отображения. Определяется как точность с которой линейное приближение отображения вблизи рассматриваемой точки (построенное с помощью производных) должно совпадать с точным отображением: $|Map(x + dx) - Lin(x + dx)|$. Область $|dx|$, в которой требуется совпадение, определяется параметром *Linear approximation region*.
- *Value of “zero” (double)* - Величина округления. Все величины меньшие его значения считаются равными нулю. Таким образом, для обеспечения точности вычислений этот параметр должен быть значительно меньше остальных.
- *Method of FP finding (newton, gradient, build surface)* - Метод поиска неподвижной точки. *newton* — поиск ведется методом Ньютона. *gradient* — поиск ведется методом градиентного спуска. *build surface* — переход в режим построения поверхности $z = |Map(x) - x|$. Доступен только для двумерных отображений.
- *Show all points (yes, no)* - Значение *yes* — отображается вся траектория поиска неподвижной точки. Значение *no* — отображается только конечная найденная неподвижная точка.
- *Show point on the surface (yes, no)* - вывод траектории поиска неподвижной точки на поверхности $z = |Map(x) - x|$ (Работает только для двумерных отображений.) *yes* — вывод траектории поиска неподвижной точки на отображении Пуанкаре и на поверхности $z = |Map(x) - x|$ *no* — вывод траектории поиска неподвижной точки только на отображение Пуанкаре.
- *Section (2D, 3D)* - Режим поиска неподвижных точек для трехмерных отображений. При значении *2D* поиск ведется на двумерной плоскости $z=const$ трехмерного отображения (используется для поиска вырожденных точек). При значении *3D* поиск ведется во всем трехмерном пространстве отображения.
- *Initial coordinate X, Y, Z (double)* - Начальные координаты поиска неподвижной точки. При запуске поиска с помощью мыши данные параметры автоматически принимают значения начальной точки поиска.
- *Color (color)* - Цвет траектории поиска неподвижной точки.

2.3.5. Продолжение неподвижных точек по параметру (Tools/Fixed point finding/Fixed point continuation)

Инструмент позволяет построить семейство неподвижных точек отображения при изменении одного из параметров системы (параметр *Continuation parameter*). Алгоритм построения семейства основан на последовательном нахождении неподвижных точек при постепенном изменении параметра. На каждом шаге в качестве начального приближения берутся координаты, получаемые из координат неподвижной точки, найденной на предыдущем шаге, с учетом значения d параметра *Extrapolation factor* по формуле $X_{n+1} = X_n + (X_n - X_{n-1}) * d$. Начальное значение параметра продолжения совпадает со значением, использованным при поиске исходной неподвижной точки, конечное значение задается параметром *Finite value*.

Параметры поиска полностью совпадают с параметрами поиска исходной неподвижной точки (см. в информационном окне исходной точки). В процессе продолжения в информационном окне выводится информация о бифуркациях неподвижной точки. Фильтр **Fixed point multipliers plot** позволяет строить мультипликаторы неподвижных точек при продолжении по параметру.

Параметры инструмента

- *Continuation parameter (list)* - Параметр, по которому продолжается неподвижная точка.
- *Step (double)* - Шаг с которым изменяется значение параметра продолжения. Может быть как положительным, так и отрицательным.
- *Finite value (double)* - Конечное значение параметра продолжения. Если шаг положительный, то значение должно быть больше исходного значения параметра, а если отрицательный, то меньше.
- *Extrapolation factor (double)* - Вспомогательный коэффициент при выборе начального приближения очередной точки.
- *Stop at FP type change (yes, no)* - Остановка продолжения при смене типа неподвижной точки. При значении *yes* продолжение остановится, если тип неподвижной точки на очередном шаге сменится. При этом в информационном окне будет выведено соответствующее значение параметра продолжения.
- *Color (color)* - Цвет семейства неподвижных точек.

2.3.6. Сепаратрисы (Tools/Fixed point finding/Separatrix)

При помощи этого инструмента строятся входящие и исходящие сепаратрисы (инвариантные многообразия) гиперболических неподвижных точек двумерных отображений. Алгоритм построения основан на последовательной итерации начального участка сепаратрисы. В качестве начального участка выбирается собственный вектор линейной части данного двумерного отображения вблизи неподвижной точки. Длина вектора задается одним из параметров инструмента (**Linear approximation region**). В используемом алгоритме линейная аппроксимация строится численно. В процессе счета

Параметры инструмента

- *Separatrix number (Int)* - Номер сепаратрисы. Номера 1,2 соответствуют первому мультипликатору исходной неподвижной точки, а 3 и 4 — второму. Если мультипликатор меньше единицы, то соответствующие сепаратрисы будут входящими, иначе — исходящими.
- *Linear approximation region (double)* - Размер области неподвижной точки в которой отображение можно считать линейным. Этим параметром задается длина начального линейного участка сепаратрисы. Если при заданном значении этого параметра не удается найти собственный вектор с необходимой точностью (параметр *Linear approximation accuracy*), то его величина автоматически уменьшается. При уменьшении параметра до величины меньшей, чем точность нахождения неподвижной точки выдается сообщение о невозможности запуска сепаратрисы. Данный параметр рекомендуется задавать значительно больше, чем точность нахождения исходной гиперболической неподвижной точки (параметр *Accuracy of FP location*).

- *Linear approximation accuracy (double)* - Точность нахождения собственных векторов линейной части отображения вблизи неподвижной точки. Определяется как угол между собственным вектором \mathbf{v} и его образом ($\text{angle}(\text{Map}(\mathbf{v}), \mathbf{v})$), выраженный в радианах. Контролирует возможность запуска сепаратрисы при текущем значении параметра *Linear approximation region*. Данный параметр рекомендуется задавать значительно больше отношения *Accuracy of FP location/Linear approximation region*.
- *Max. distance between points (double)* - Максимальное расстояние между соседними точками сепаратрисы. Регулирует плотность точек на сепаратрисе и, следовательно, точность построения отдаленных участков сепаратрисы.
- *Max. angle of one iteration (double)* - Максимальный угол поворота отрезка, соединяющего последовательные точки на сепаратрисе. Регулирует точность построения сепаратрисы вблизи резких поворотов.
- *Min. distance for angle control (double)* - ???
- *Color (color)* - Цвет сепаратрисы.
- *Point type (small, middle, big)* - Тип точек сепаратрисы.

2.3.7. Дерево бифуркаций удвоения периода (Tools/Fixed point finding/Bifurcating tree)

Данный инструмент позволяет исследовать каскад бифуркаций удвоения периода неподвижных точек двумерного отображения. В качестве исходной неподвижной точки может служить эллиптическая неподвижная точка любого периода. После запуска инструмента исходная неподвижная точка продолжается по параметру, при этом параметры продолжения (название переменной, шаг продолжения и пр.) полностью совпадают с параметрами инструмента. Продолжение неподвижных точек по параметру. При продолжении по параметру отслеживаются бифуркации со сменой типа неподвижной точки и вблизи них ведется поиск неподвижных точек удвоенного периода. Если такие точки существуют, то они также продолжают по параметру и т.д. При каждой бифуркации удвоения периода происходит уменьшение шага продолжения, увеличение точности нахождения бифуркационного значения параметра продолжения и уменьшение области в которой ищутся точки удвоенного периода. В случае отсутствия бифуркаций данный инструмент продолжает исходную неподвижную точку аналогично инструменту Продолжение неподвижных точек по параметру. Во время работы инструмента в окне построения отображения выводится траектория продолжения неподвижных точек по параметру. Само бифуркационное дерево можно построить, открыв фильтр **Continuation plot** и выбрав в качестве координат параметр продолжения и какую-либо координату неподвижной точки. Информация о бифуркациях в процессе построения выводится в информационном окне.

Параметры инструмента

- *Accuracy of bifurcation value (double)* - Начальная точность с которой находится бифуркационное значение параметра продолжения.
- *Initial size of bifurcation region (double)* - Размер области в которой ведется поиск неподвижных точек удвоенного периода. Используется в качестве расстояния от потерявшей устойчивость точки до точки, с которой начинается поиск решений удвоенного периода.

- *Coefficient of decreasing of the step (double)* - Коэффициент, определяющий во сколько раз уменьшаются шаг продолжения и параметры *Accuracy of bifurcation point* и *Initial size of bifurcation region* при каждой бифуркации удвоения. По умолчанию значение параметра равно константе Фейгенбаума для гамильтоновых систем.
- *Color (color)* - Цвет бифуркационного дерева.
- *Point type (small, middle, big)* - Тип точек траекторий неподвижных точек, отображаемых в окне построения отображения.

2.3.8. Построение поверхности $z = |\text{Map}(x) - x|$ (Tools/Surface $|\text{Map}(x) - x|$)

Кроме поиска неподвижной точки, разработанный программный комплекс предоставляет возможность построения поверхности $z = |\text{Map}(x) - x|$ для двумерных отображений. Неподвижные точки отображения являются минимумами этой поверхности с нулевыми значениями z . Построение данной поверхности помогает разобраться в причинах проблем с нахождением неподвижной точки. В частности, одной из распространенных причин является разрыв поверхности вблизи неподвижной точки (что является стандартной ситуацией для отображения Пуанкаре). Исключение таких разрывов, как правило, связано с необходимостью смены локальных координат. Разрывы связанные с цилиндрической или сферической топологией плоскости отображения можно ликвидировать сдвигом (поворотом) координат отображения по вертикали или горизонтали, что делается в пакете стандартным способом при построении отображения. После построения поверхности, при поиске неподвижных точек методом Ньютона или градиентного спуска траектория поиска будет отображаться и также на нарисованной поверхности. Инструмент работает многопоточно.

Параметры инструмента

- *Number of threads (int)* - Количество запускаемых потоков.
- *Step along X, Y (double)* - Шаги между узлами сетки, по которой строится поверхность вдоль осей X и Y.
- *Color (color)* - Цвет построения.

2.3.9. Области возможного движения (ОВД) (Tools/Region of allowable motion (RAM))

Инструмент позволяет строить области возможного движения для отображений Пуанкаре динамических систем. При построении инструмент тестирует точки видимой части плоскости (пространства) отображения на возможность запуска траектории с текущими значениями параметров задачи и отображения Пуанкаре. Инструмент закрашивает либо точки принадлежащие ОВД, либо точки ему не принадлежащие (зависит от параметра *Draw DPM points*). Инструмент работает многопоточно.

Особенности двумерных отображений. Для двумерных отображений инструмент позволяет строить трехмерную поверхность сечения уровня энергии плоскостью отображения Пуанкаре. Эта поверхность задается уравнением $Energy(p_1, p_2, q_1, q_2 = const) = const$. Поскольку, построение сечения уровня энергии возможно только для точек принадлежащих ОВД, то данная функция работает только при закрашивании точек ОВД (*Draw DPM points = "yes"*).

Особенности трехмерных отображений. Для трехмерных отображений инструмент позволяет строить ОВД как в трехмерной области, так и на двумерном сечении $z=\text{const}$ этой области (параметр *Section*).

Параметры инструмента

- *Step along X, Y, Z (double)* - Шаги построения ОВД вдоль осей X, Y и Z.
- *Draw DPM points (yes, no)* - *yes* — закрашивать точки принадлежащие ОВД, *no* — закрашивать точки не принадлежащие ОВД.
- *Draw on energy level (yes, no)* - *yes* — строить поверхность сечения уровня энергии в отдельном окне. *no* — не строить поверхность сечения уровня энергии. Параметр работает только для двумерных отображений.
- *Section (2D, 3D)* - 2D — Построение ОВД на на двумерном сечении $z=\text{const}$ трехмерной области. 3D — Построение ОВД в трехмерной области. Параметр работает только для трехмерных отображений.
- *Color (color)* - Цвет построения областей возможного движения.

2.3.10. Бифуркационные диаграммы (Tools/Topological analysis)

Данный инструмент позволяет построить ряд бифуркационных диаграмм на плоскости первых интегралов системы и помогает поставить соответствие тем или иным траекториям отображения точки этой диаграммы. Все ветви диаграммы строятся отдельно (параметр *Branch number*) и заданы параметрически. Точки на ветвях диаграммы соответствуют тем значениям интегралов для которых они становятся зависимыми. Построение бифуркационной диаграммы происходит в окне создаваемом фильтром **Bifurcation plot**. При этом тип окна (параметр фильтра *Diagram name*) и тип строящейся диаграммы (параметр данного инструмента *Diagram name*) должны совпадать. После того как фильтр создан, каждой запущенной траектории фазового потока в окне построения отображения Пуанкаре автоматически будет ставиться в соответствие точка на бифуркационной диаграмме с соответствующими значениями интегралов.

Параметры инструмента

- *Diagram name (list)* - Выбор диаграммы из списка возможных для данной задачи.
- *Branch number (list)* - Выбор ветви диаграммы.
- *Min. value of parameter (double)* - Минимальное значение параметра.
- *Max. value of parameter (double)* - Максимальное значение параметра.
- *Parameter step (double)* - Шаг по параметру при построении текущей ветви. Регулирует плотность точек на ветви.
- *Color (color)* - Цвет ветви диаграммы.

2.4. Фильтры и дополнительные окна

При работе описанных выше инструментов выводимая им информация отображается в одном или более основных окнах. Однако возможен вывод дополнительной информации о процессе интегрирования. За это отвечают различные фильтры.

Создание фильтра не запускает отдельного потока, оно лишь добавляет дополнительное графическое окно вывода к запускаемым базовым инструментам. При этом базовые инструменты начинают вывод информации как в свои основные окна, так и во все созданные окна фильтров. Например, если создать фильтр построения графиков, а после этого запустить инструмент отображения Пуанкаре, то в процессе интегрирования уравнений движения в основном окне будет строиться само отображение, а в окне фильтра будет выводиться график выбранной величины в зависимости от времени. Для каждого из фильтров существует свое условие вывода информации в графическое окно (например, для фильтра построения графиков это вывод через заданное время интегрирования). Таким образом, фильтр отсеивает ненужные данные поступающие от базового инструмента и выводит в графическое окно только необходимое. В связи с этим и образовался термин "фильтр" для обозначения дополнительных графических окон.

Приведем иерархию фильтров доступных в комплексе:

- Построение двумерных графиков
- Построение трехмерных графиков
- Визуализация движения мультипликаторов неподвижной точки
- Построение бифуркационных диаграмм
- Визуализация движения апексов
- Визуализация движения тел

2.4.1. Построение двумерных графиков (Filter/2D-plot)

Вывод в данном фильтре осуществляют инструменты **Отображение Пуанкаре** и **ОВД** в конфигурационном пространстве. Фильтр предоставляет возможность построения двумерных графиков функций фазовых переменных при движении вдоль траектории отображения Пуанкаре. Вывод точек происходит при изменении значения управляющей переменной (параметр *Control variable*) на заданную величину (параметр *Period*). Кроме того с помощью инструмента **ОВД** в конфигурационном пространстве в окне фильтра можно построить области возможного движения в заданных координатах. При этом закрашиваются области недоступные для движения. Граница закрашенной области представляет собой кривую нулевых скоростей.

Параметры фильтра

- *Out condition (list)* - Параметр, по значениям которого осуществляется вывод информации в фильтр.
- *Axis X, Y (list)* - С помощью данных параметров производится выбор функций, откладываемых по осям X и Y.

- *Out value (double)* - Данный параметр определяет частоту вывода точек на график при изменении параметра *Out condition*. Если разность между текущим значением управляющего параметра и его значением в последней выведенной точке превышает данный параметр, то производится вывод очередной точки.
- *Max. number of points (int)* - Данный параметр определяет максимальное число точек выводимых на одной траектории.
- *Xmin, Xmax, Ymin, Ymax (double)* - Данные параметры задают размеры создаваемого окна фильтра.
- *Hold proportions (yes, no)* - Данный параметр определяет поведение окна фильтра при масштабировании. Если значение параметра равно *yes*, то масштабирование вдоль обеих осей производится с одинаковым коэффициентом, то есть отсутствует сжатие или растяжение вдоль какой-либо из осей. Если же значение параметра равно *no*, то масштабирование вдоль осей происходит независимо друг от друга с разными коэффициентами.
- *Point type (small, middle, big)* - Данный параметр задает тип точек которыми рисуются траектории в окне фильтра.

2.4.2. Построение трехмерных графиков (Filter/3D-plot)

Вывод в данном фильтре осуществляет инструмент **Отображение Пуанкаре**. Фильтр предоставляет возможность построения трехмерных графиков функций фазовых переменных при движении вдоль траектории отображения Пуанкаре. Вывод точек происходит при изменении значения управляющей переменной (параметр *Control variable*) на заданную величину (параметр *Period*).

Параметры фильтра

- *Out condition (list)* - Параметр, по значениям которого осуществляется вывод информации в фильтр.
- *Axis X, Y, Z (list)* - С помощью данных параметров производится выбор функций, откладываемых по осям X, Y и Z.
- *Out value (double)* - Данный параметр определяет частоту вывода точек на график при изменении параметра *Out condition*. Если разность между текущим значением управляющего параметра и его значением в последней выведенной точке превышает данный параметр, то производится вывод очередной точки.
- *Max. number of points (int)* - Данный параметр определяет максимальное число точек выводимых на одной траектории.
- *Xmin, Xmax, Ymin, Ymax, Zmin, Zmax (double)* - Данные параметры задают размеры создаваемого окна фильтра.
- *Point type (small, middle, big)* - Данный параметр задает тип точек которыми рисуются траектории в окне фильтра.

2.4.3. Визуализация движения мультипликаторов неподвижной точки (Filter/Fixed point multipliers plot)

Вывод в данном фильтре осуществляют инструменты **Продолжение неподвижных точек по параметру** и **Дерево бифуркаций удвоения периода**. Данный фильтр реализует визуализацию движения мультипликаторов неподвижной точки на комплексной плоскости при продолжении ее по параметру. Все мультипликаторы при продолжении выводятся одновременно. В случае инструмента **Продолжение неподвижных точек по параметру** положения мультипликаторов выводятся на график через равные промежутки по переменной продолжения. В случае инструмента **Дерево бифуркаций удвоения периода** вывод положений мультипликаторов производится на каждом шаге построения дерева и не зависит от изменения параметра продолжения. Кроме того, при построении дерева бифуркаций выводятся мультипликаторы только его эллиптических ветвей. Для удобства анализа мультипликаторов на графике изображается единичная окружность.

Параметры фильтра

- *Period (double)* - Данный параметр определяет частоту вывода точек на график при изменении параметра продолжения. Если разность между текущим значением параметра продолжения и его значением в последней выведенной точке превышает данный параметр, то производится вывод очередной точки. Данный параметр используется только инструментом **Продолжение неподвижных точек по параметру**.
- *Xmin, Xmax, Ymin, Ymax (double)* - Данные параметры задают размеры создаваемого окна фильтра.

2.4.4. Построение бифуркационных диаграмм (Filter/Bifurcation plot)

В окне данного фильтра с помощью инструмента **Topological analysis** производится построение бифуркационных диаграмм на плоскости первых интегралов задачи. При этом тип окна (параметр фильтра *Diagram name*) и тип строящейся диаграммы (параметр инструмента **Diagram name**) должны совпадать. Параметры построения диаграмм задаются инструментом. Кроме этого, окне данного фильтра каждой траектории отображения Пуанкаре (инструмент **Poincare map**) ставится в соответствие точка на рассматриваемой плоскости первых интегралов.

Параметры фильтра

- *Diagram name (list)* - Данным параметром осуществляется выбор бифуркационной диаграммы, которая будет строиться в открываемом окне.
- *Xmin, Xmax, Ymin, Ymax (double)* - Данные параметры задают размеры создаваемого окна фильтра.
- *Hold proportions (yes, no)* - Данный параметр определяет поведение окна фильтра при масштабировании. Если значение параметра равно *yes*, то масштабирование вдоль обеих осей производится с одинаковым коэффициентом, то есть отсутствует сжатие или растяжение вдоль какой-либо из осей. Если же значение параметра равно *no*, то масштабирование вдоль осей происходит независимо друг от друга с разными коэффициентами.

2.4.5. Визуализация движения апексов (Filter/Visualization of apex motion)

Вывод в данном фильтре осуществляется инструментом **Отображение Пуанкаре** в задачах связанных с движением твердого тела. При интегрировании траектории, в окне фильтра выводится текущее положение тела и систем координат (абсолютной и связанной с телом). Вывод осуществляется через равные промежутки по времени.

Параметры фильтра

- *Period (double)* - С помощью данного параметра задается период по времени через который обновляется картинка.
- *Max. number of the points (int)* - Данный параметр определяет максимальное число точек выводимых на одной траектории.
- *Looking in (absolute frame, rotating frame)* - Данный параметр задает систему координат из которой ведется наблюдение. *absolute frame* — неподвижная система координат. *rotating frame* — система координат связанная с телом.
- *Draw Apex X, Y, Z (no, without trace, with trace)* - С помощью данных параметров задаются режимы отображения апексов: *no* — соответствующий апекс не выводится *without trace* — соответствующий апекс выводится, но не оставляет следа при вращении. *with trace* — соответствующий апекс выводится, и оставляет след при вращении.
- *X, Y, Z -axis color (color)* - С помощью данных параметров задаются цвета апексов и соответствующих им граней вращающегося тела.
- *Draw body (yes, no)* - Данный параметр позволяет рисовать модель тела в виде параллелограмма и следить за его вращением во время интегрирования траектории движения.
- *X, Y, Z body size (double)* - С помощью данных параметров задаются размеры вращающегося тела вдоль осей координат.
- *Draw sphere (yes, no)* - Данный параметр позволяет по желанию пользователя нарисовать единичную сферу на трехмерной сцене фильтра. Данная возможность используется при исследовании траекторий движения апексов.
- *Draw arbitrary vector (yes, no)* - Данный параметр позволяет задать произвольный вектор в текущей системе координат (параметр *Looking in*) и следить за его вращением при движении твердого тела.
- *X, Y, Z coord. of a vector (double)* - С помощью данных параметров задаются координаты X, Y и Z произвольного вектора в начальный момент времени.
- *Point type (small, big)* - Данный параметр задает тип точек которыми рисуются следы апексов.

2.4.6. Визуализация движения тел (Filter/Visualization of task)

В физических задачах бывает полезно и интересно визуализировать движение объектов, описываемых системой, в реальном мире. Подобные знания позволяют понять физическую природу тех или иных особых периодических траекторий или режимов движения, как сказываются различные динамические эффекты, исследуемые с помощью описанных инструментов, а реальном движении объектов, как физически влияют параметры системы на динамику. Кроме того такая возможность (в совокупности с результатами реальных экспериментов либо интуитивным представлением) может использоваться для проверки правильности составленной модели, описывающей исследуемую систему. Для визуализации движения объектов описываемых динамической системой используется Универсальный трехмерный визуализатор. В конкретных задачах он может быть наполнен различными объектами (эллипсоид, плоскость, параболоид, точка, линия и т. д.). При этом параметры этих объектов связываются с функциями фазовых переменных системы. Трехмерный визуализатор позволяет графически отображать динамику выбранных объектов системы, в том числе траектории, образуемые при движении объектов. Например для задачи качения эллипсоида по плоскости объектами являются эллипсоид, плоскость, траектория оставляемая эллипсоидом на плоскости (след эллипсоида) и траектория оставляемая точкой контакта с плоскостью на эллипсоиде(след плоскости). Пользователь может выбрать какие из объектов системы он хочет видеть, может задать цвета объектов, наложить на них текстуры или сетку, задать степень прозрачности. Кроме того визуализатор позволяет сохранять отображаемую информацию как в виде снимков сцены, так и всю динамику системы в виде файла с видео.

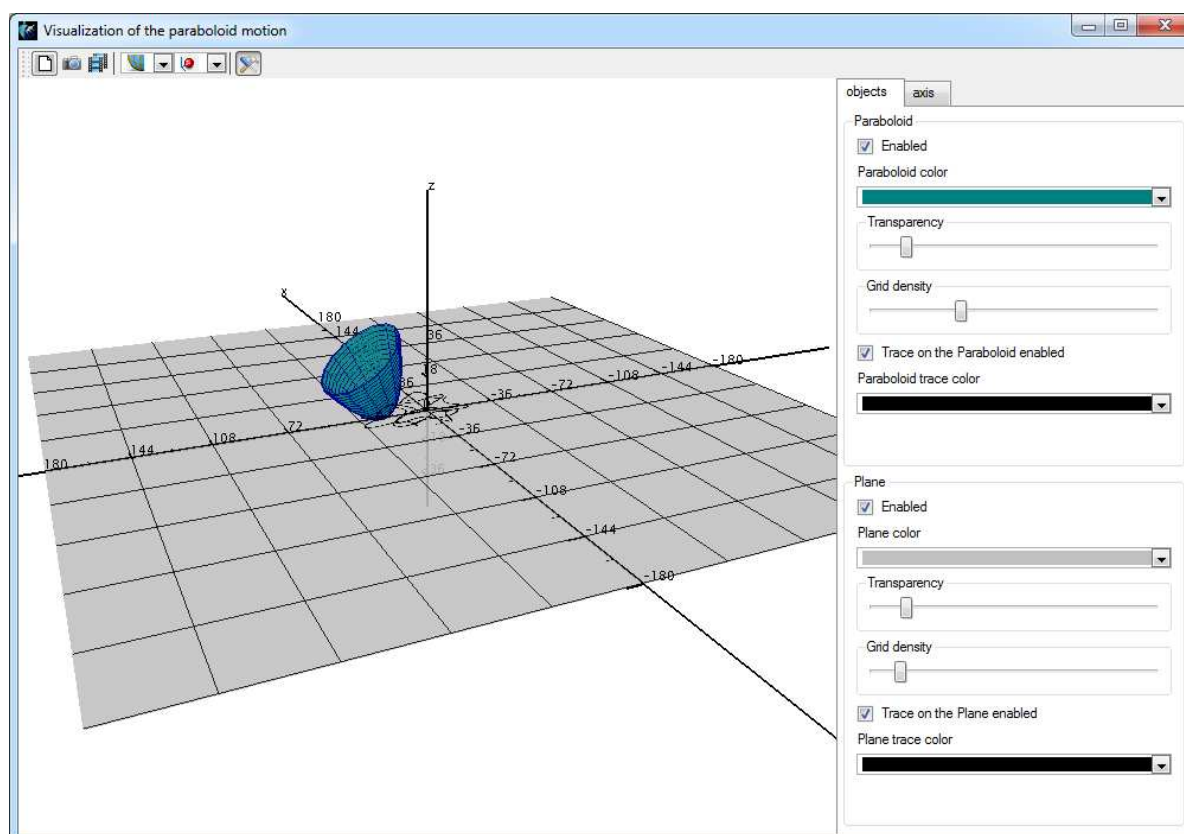


Рис. 4. Демонстрация работы визуализатора.

Визуализатор открывается в отдельном окне (см. рис. 4) В верхней части окна располагается панель инструментов, которая позволяет:

- Восстановить положение и направление камеры по-умолчанию
- Сделать снимок сцены
- Сделать видеозапись
- Выбрать стиль отрисовки объекта (сетка, заливка, сетка и заливка)
- Выбрать стиль осей (без осей, нормальные, коробка)
- Показать/скрыть панель настроек визуализатора

Панель настроек визуализатора отображается в правой части окна и содержит две закладки:

- objects - содержит элементы управления статическим и динамическим объектом
 - Enabled - отображать/скрыть соответствующий объект
 - Object Color - цвет отрисовки
 - Transparency - прозрачность
 - Grid density - частота сетки
 - Trace on the object enabled - отображать/скрыть след точки контакта
 - Object trace color - цвет следа точки контакта
- axis - содержит средства управления осями
 - Draw ticks and subticks - отображать/скрыть засечки
 - Range min - минимальное значение
 - Range max - максимальное значение
 - Number of tickmarks - количество больших засечек
 - Number of subticks - количество маленьких засечек

3. Описание задач неголономной механики

3.1. Качение параболоида по плоскости без проскальзывания

В разделе исследуется задача качения твердого тела по плоскости без проскальзывания. В данном случае поверхность тела описывается уравнениями эллиптического параболоида.

3.1.1. Уравнения движения и интегралы

Условие отсутствия проскальзывания между телом и плоскостью описывается неголономной связью в виде

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, соединяющий центр масс G с точкой контакта R , \mathbf{v} , $\boldsymbol{\omega}$ — скорость центра масс и угловая скорость тела соответственно (см. рис. 5). Притом \mathbf{r} , \mathbf{v} , $\boldsymbol{\omega}$ заданы в проекциях на оси жестко связанные с телом.

Уравнения движения твердого тела имеют вид (см. [2])

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + m\dot{\mathbf{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + mg\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \end{cases} \quad (2)$$

где $\mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ — кинетический момент тела относительно точки контакта, \mathbf{I} — тензор инерции тела, $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный орт вертикали, m — масса тела, g — ускорение свободного падения, U — потенциальная энергия дополнительного поля. Уравнения (2) аналогичны классическим уравнениям Эйлера–Пуассона, описывающим движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, они обладают двумя интегралами

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) - mg(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}) + U(\boldsymbol{\gamma}), \quad (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad (3)$$

энергии и геометрическим. При этом предполагается, что вектора \mathbf{r} и $\boldsymbol{\gamma}$ связаны соотношением, задающим гауссову проекцию

$$\boldsymbol{\gamma} = -\frac{\text{grad } F(\mathbf{r})}{|\text{grad } F(\mathbf{r})|}, \quad (4)$$

Поверхность тела и гауссова проекция (4) задаются соотношениями

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{r_1^2}{p} + \frac{r_2^2}{q} \right) - (r_3 + h) = 0, \\ r_1 &= -p \frac{\gamma_1}{\gamma_3}, \quad r_2 = -q \frac{\gamma_2}{\gamma_3}, \quad r_3 = -h + \frac{p\gamma_1^2 + q\gamma_2^2}{2\gamma_3^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где p, q — радиусы главных кривизн в вершине параболоида, h — высота центра масс, расположенного на оси параболоида.

В рассматриваемой задаче допускается поворот динамических осей параболоида относительно геометрических на угол $\delta \neq 0$ вокруг вертикальной оси Ox_3 . В этом случае тензор инерции в главных геометрических осях имеет следующий вид

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 \cos^2 \delta + I_2 \sin^2 \delta & (I_1 - I_2) \cos \delta \sin \delta & 0 \\ (I_1 - I_2) \cos \delta \sin \delta & I_1 \sin^2 \delta + I_2 \cos^2 \delta & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

3.1.2. Переменные Андуайе–Депри и трехмерные отображения Пуанкаре

Для построения отображения Пуанкаре наиболее удобны (за счёт явной редукции системы) переменные Андуайе–Депри (L, G, H, l, g) , физический смысл которых описан, например, в [1]. Ниже приведены явные формулы пересчёта из переменных Андуайе–Депри

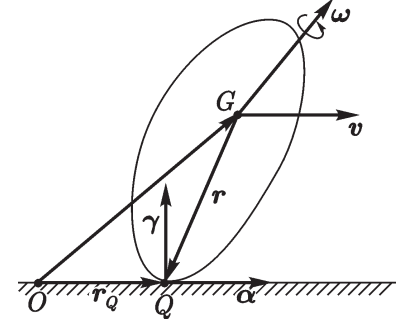


Рис. 5. Качение эллипсоида по плоскости

в переменные (\mathbf{M}, γ)

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \sqrt{G^2 - L^2} \sin l, & M_2 &= \sqrt{G^2 - L^2} \cos l, & M_3 &= L, \\
 \gamma_1 &= \left(\frac{H}{G} \sqrt{1 - \left(\frac{L}{G}\right)^2} + \frac{L}{G} \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G}\right)^2} \cos g \right) \sin l + \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G}\right)^2} \sin g \cos l, \\
 \gamma_2 &= \left(\frac{H}{G} \sqrt{1 - \left(\frac{L}{G}\right)^2} + \frac{L}{G} \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G}\right)^2} \cos g \right) \cos l - \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G}\right)^2} \sin g \sin l, \\
 \gamma_3 &= \left(\frac{H}{G}\right) \left(\frac{L}{G}\right) - \sqrt{1 - \left(\frac{L}{G}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G}\right)^2} \cos g.
 \end{aligned} \tag{7}$$

На уровне двух известных интегралов движения (3) уравнения (2) задают четырехмерный фазовый поток, сечение которого трехмерной гиперплоскостью приводит к некоторому точечному трехмерному отображению (отображение Пуанкаре). Следует отметить, что для переменных L, G, H, l, g из (7) заведомо выполнено $(\gamma, \gamma) = 1$, поэтому на уровне этого интеграла формулы (7) задают взаимно однозначное преобразование. Трехмерное сечение четырехмерного уровня энергии $\mathcal{H}(L, G, H, l, g) = E$ задаются плоскостью $g = g_0 = \text{const}$, на которой выбираются координаты $\left(l, \frac{L}{G}, \frac{H}{G}\right)$.

Размерность исследуемой системы равна четырем (6 уравнений (2) - 2 интеграла (3)). Поэтому основной инструмент исследования динамики параболоида - трёхмерное отображение Пуанкаре, возникающие при сечении исходного четырехмерного фазового потока по переменной Андуайе-Депри - g . Для задания начальной точки отображения необходимо указать 3 координаты $(l, L/G, H/G)$.

Существуют случаи, когда уравнения движения обладают ещё одним интегралом, с учетом которого отображение становится двумерным.

3.1.3. Параметры задачи, вынесенные в программном комплексе Chaos

Перечислим основные параметры задачи, отображаемые в программном комплексе Chaos

- *Energy* - Суммарная энергия тела
- $\frac{1}{I_1}, \frac{1}{I_2}, \frac{1}{I_3}$ - главные моменты инерции параболоида
- m - масса параболоида
- g - ускорение свободного падения в $\text{см}/\text{с}^2$
- p, q - главные полуоси параболоида
- δ - угол поворота динамических осей относительно геометрических вокруг вертикальной оси в радианах
- h - высота центра масс эллипсоида
- *Initial H/G* - начальная координата отображения Пуанкаре по вертикальной оси H/G
- *Rotation of the map (vert. / horiz.)* - углы поворота отображения в вертикальной / горизонтальной плоскости.

3.1.4. Список величин, выводимых в программном комплексе Chaos

- t - суммарное время интегрирование системы (в шагах интегрирования)
- $E = \frac{1}{2}(M, \omega)$ - Значение энергии тела
- $H = (M + K, \gamma)$ - Значение константы площадей
- $(G = |M + K|)$ - Значение переменной Депри G
- g - Значение переменной Депри g
- l - Значение переменной Депри l
- L - Значение переменной Депри L
- L/G - Значение отношения переменных Депри $\frac{L}{G}$
- $(G = |M + K|)$ - Значение переменной Депри G
- M_1, M_2, M_3 - Компоненты вектора кинетического момента
- $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ - Компоненты вектора γ
- $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ - Компоненты вектора ω
- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - Компоненты вектора α
- $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ - Компоненты вектора β
- $\phi(mod2\pi), \psi(mod2\pi), \theta$ - Углы Эйлера поворота системы координат, связанной с телом, относительно неподвижной системы координат
- $RabsX, RabsY$ - Координаты центра масс (точки контакта) шара в абсолютной (неподвижной системе координат)
- V_x, V_y - Скорость центра масс (точки контакта) шара в абсолютной (неподвижной системе координат)
- L on the plane - Длина следа, оставляемого шаром на плоскости
- L on the ball - Длина следа, оставляемого плоскостью на шаре
- L difference - Разница длин следов на плоскости и на шаре

3.2. Качение эллипсоида по плоскости без проскальзывания

В разделе исследуется задача качения твердого тела по плоскости без проскальзывания. В данном случае поверхность тела описывается уравнениями трехосного эллипсоида.

3.2.1. Уравнения движения и интегралы

Для исследования глобальных эффектов (не только движения вблизи вертикальных вращений) в качестве поверхности катящегося твердого тела используется модель трехосного эллипсоида. При этом полагается, что центр масс твердого эллипсоида смещен относительно геометрического центра на вектор $a = (a_1, a_2, a_3)$, а динамические оси повернуты относительно геометрических на заданные углы Эйлера φ, θ, ψ .

Качение твердого тела, имеющего форму эллипсоида, описывается теми же уравнениями (2) и имеет те же интегралы (3), что и в случае параболоида. Гауссова проекция (4) эллипсоида задается формулами

$$F(\mathbf{r}) = \frac{(r_1 + a_1)^2}{b_1^2} + \frac{(r_2 + a_2)^2}{b_2^2} + \frac{(r_3 + a_3)^2}{b_3^2} - 1 = 0, \quad r_i = \frac{b_i^2 \gamma_i}{\sqrt{b_1^2 \gamma_1^2 + b_2^2 \gamma_2^2 + b_3^2 \gamma_3^2}} + a_i, \quad (8)$$

где b_1, b_2, b_3 — главные полуоси эллипсоида. Главные радиусы кривизны p, q , например, в вершине $r_1 = r_2 = 0, r_3 = b_3$, задаются формулами $p = \frac{b_1^2}{b_3}, q = \frac{b_2^2}{b_3}$.

А тензор инерции в главных геометрических осях примет вид $I = Q^T \text{diag}(I_1, I_2, I_3)Q$, где I_1, I_2, I_3 — главные центральные моменты инерции, а матрица поворота Q имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \psi \sin \varphi & \cos \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \psi \sin \varphi & \sin \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \psi \cos \varphi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \psi \cos \varphi & \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & -\sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (9)$$

Следует отметить, что задача качения эллипсоида по плоскости рассматривается не только в поле действия силы тяжести, но и в дополнительном поле $U = \frac{1}{2}(\gamma, B\gamma)$, где B - положительно определенная симметричная матрица.

Как и в случае с параболоидом размерность системы равна четырем. Поэтому основной инструмент исследования динамики параболоида - трёхмерное отображение Пуанкаре, возникающие при сечении исходного четырехмерного фазового потока по переменной Андуайе-Депри - g Для задания начальной точки отображения необходимо указать 3 координаты ($l, L/G, H/G$).

3.2.2. Параметры задачи, вынесенные в программном комплексе Chaos

Перечислим основные параметры задачи, отображаемые в программном комплексе Chaos

- *Energy* - Суммарная энергия тела
- *Initial H/G* - начальная координата отображения Пуанкаре по вертикальной оси H/G
- $\frac{1}{I_1}, \frac{1}{I_2}, \frac{1}{I_3}$ - обратные величины к главным моментам инерции эллипсоида
- b_1, b_2, b_3 - главные полуоси эллипсоида
- a_1, a_2, a_3 - координаты центра масс эллипсоида, относительно его геометрического центра
- *Phi, Theta, Psi* - Повороты динамических осей относительно геометрических (углы Эйлера) геометрических

- m - масса эллипсоида
- g - ускорение свободного падения
- $B11, B12, B13, B22, B23, B33$ - коэффициенты симметричной матрицы, задающей дополнительное поле U
- *Rotation of the map (vert. / horiz.)* - углы поворота отображения в вертикальной / горизонтальной плоскости.

3.3. Качение шара по эллипсоиду без проскальзывания

В разделе рассматривается задача о качении шара без проскальзывания по трехмерной поверхности. В качестве поверхности в данном случае выбран трехосный эллипсоид.

3.3.1. Уравнения движения шара и интегралы

Условие отсутствия проскальзывания (скорость в точке контакта равна нулю) записывается в виде

$$\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} = 0. \quad (10)$$

Движения однородного шара удобнее описывать в неподвижной системе координат. В этой системе уравнения изменения импульса и момента импульса относительно центра масс шара с учетом реакции и внешних сил имеют вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{N} + \mathbf{F}, \quad (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})' = \mathbf{a} \times \mathbf{N} + \mathbf{M}_F, \quad (11)$$

Здесь m — масса шара, \mathbf{v} — скорость его центра масс, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, $\mathbf{I} = \mu\mathbf{E}$ (шаровой) центральный тензор инерции, \mathbf{a} — вектор из центра масс в точку контакта, R — радиус шара, \mathbf{N} — реакция в точке контакта (см. рис. 6), \mathbf{F} , \mathbf{M}_F — внешняя сила и момент сил относительно точки контакта соответственно.

Исключая из этих уравнений реакцию \mathbf{N} и добавляя кинематическое уравнение равенства скоростей точки контакта на поверхности и на шаре, получаем систему шести уравнений, описывающую динамику вектора кинетического момента относительно точки контакта \mathbf{M} и вектора нормали к поверхности $\boldsymbol{\gamma} = -R^{-1}\mathbf{a}$ (рис. 6):

$$\dot{\mathbf{M}} = D\dot{\boldsymbol{\gamma}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}) + \mathbf{M}_F, \quad \dot{\mathbf{r}} + R\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\omega} \times R\boldsymbol{\gamma}, \quad (12)$$

где $D = mR^2$, а векторы $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{r} (радиус-вектор точки контакта) необходимо выразить из соотношений

$$\mathbf{M} = \mu\boldsymbol{\omega} + D\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}), \quad \boldsymbol{\gamma} = \frac{\nabla F(\mathbf{r})}{|\nabla F(\mathbf{r})|}, \quad (13)$$

где $F(\mathbf{r}) = 0$ — уравнение, задающее неподвижную поверхность, по которой катится шар.

Уравнения (12) в случае потенциального поля с потенциалом $U(\mathbf{r} + R\boldsymbol{\gamma})$ обладают интегралами энергии и геометрическим интегралом

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) + U(\mathbf{r} + R\boldsymbol{\gamma}), \quad F_1 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1. \quad (14)$$

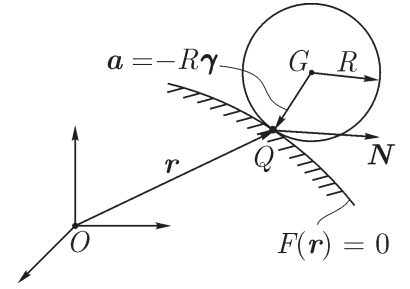


Рис. 6. Качение шара по поверхности (G — центр масс, Q — точка контакта с поверхностью)

В случае, когда центр масс шара движется по эллипсоиду, задаваемому уравнением

$$\mathbf{r} + R\boldsymbol{\gamma} = \frac{\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{B}\boldsymbol{\gamma})}}, \quad (15)$$

где $\mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, b_3)$, b_1, b_2, b_3 — квадраты главных полуосей эллипсоида, уравнения движения в переменных $\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}$ записываются в виде:

$$\dot{\mathbf{M}} = -\frac{D}{\mu + D}(\mathbf{M}, \dot{\boldsymbol{\gamma}})\boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{R\sqrt{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{B}\boldsymbol{\gamma})}}{\mu + D}\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{B}^{-1}(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{M})) \quad (16)$$

Оказывается, что эти уравнения при произвольной (невырожденной) матрице \mathbf{B} обладают инвариантной мерой с плотностью ρ и квадратичным интегралом F_2 , которые представляются в форме:

$$\rho = (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{B}\boldsymbol{\gamma})^{-2}, \quad F_2 = \frac{(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{M}, \mathbf{B}^{-1}(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{M}))}{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{B}\boldsymbol{\gamma})}. \quad (17)$$

В переменных $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})$ этот интеграл примет вид:

$$K = \frac{(\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \mathbf{B}^{-1}(\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}))}{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{B}\boldsymbol{\gamma})}. \quad (18)$$

Оказывается, что в такой форме интеграл легко обобщается на случай добавления внешних полей с потенциалом следующего вида

$$U = \frac{k}{2}(\mathbf{r} + R\boldsymbol{\gamma})^2 + \sum_i \frac{c_i}{(\mathbf{r}_i + R\boldsymbol{\gamma}_i)^2}, \quad k, c_i = \text{const} \quad (19)$$

Известно, что добавление такого поля в задачу (16) сохраняет интеграл энергии и геометрический интеграл (14). Обобщенный на случай потенциального поля (19) интеграл K имеет вид

$$K = \frac{(\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \mathbf{B}^{-1}(\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}))}{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{B}\boldsymbol{\gamma})} - 4((\mathbf{r} + R\boldsymbol{\gamma}), \mathbf{B}^{-2}(\mathbf{r} + R\boldsymbol{\gamma})) \left(k - \frac{1}{((\mathbf{r} + R\boldsymbol{\gamma}), \mathbf{B}(\mathbf{r} + R\boldsymbol{\gamma}))} \sum_i \frac{c_i}{b_i(\mathbf{r}_i + R\boldsymbol{\gamma}_i)^2} \right) \quad (20)$$

Кроме двух интегралов (14), понижающих размерность системы до четырех, в случае произвольной поверхности $F(\mathbf{r}) = 0$ система (12) не обладает ни мерой, ни двумя дополнительными интегралами, необходимыми для интегрируемости.

В случае поверхности, имеющую форму трехосного эллипсоида, размерность системы (11) понижается до трех за счет дополнительного интеграла F_2 , а соответствующее ей отображение Пуанкаре в переменных Андуайе–Депри становится двумерным в переменных $(l, L/G)$. При этом, за счёт существования инвариантной меры, в системе исключается существование притягивающих множеств (аттракторов), что численно подтверждается в экспериментах.

Для некоторых поверхностей уравнения движения обладают дополнительным интегралом, с учетом которого отображение становится двумерным.

3.3.2. Параметры задачи, вынесенные в программном комплексе Chaos

Перечислим основные параметры задачи, отображаемые в программном комплексе Chaos

- *Energy* - Суммарная энергия тела
- *Integral* - Значение дополнительного интеграла (20)
- $k=D/(\mu+D)$ - значение коэффициента в уравнениях для моментов
- μ - момент инерции шара
- b_1, b_2, b_3 - *ellipsoid semiaxes* - главные полуоси эллипсоида, по которому движется шар
- R - радиус шара
- k - коэффициент, входящий в первое слагаемое потенциальной энергии
- $c1, c2, c3$ - коэффициенты, входящие во второе слагаемое потенциальной энергии
- *Rotation of the map (vert. / horiz.)* - углы поворота отображения в вертикальной / горизонтальной плоскости
- *Step of root finding* - шаг численного поиска корня уравнения, решаемого для определения недостающей переменной Андуйе–Депри (H) по заданной энергии
- *Accuracy of root finding* - точность численного поиска корня уравнения

3.4. Качения шара по возмущенному параболоиду без проскальзывания

В разделе рассматривается задача о качении шара без проскальзывания по трехмерной поверхности.

3.4.1. Уравнения движения и интегралы

В качестве поверхности в данном случае выбран параболоид с кубическим возмущением, заданный уравнением

$$z = \frac{x^2}{2b_1} + \frac{y^2}{2b_2} + \frac{\Lambda_1 x^3 + \Lambda_2 x^2 y + \Lambda_3 x y^2 + \Lambda_4 y^3}{3}. \quad (21)$$

В случае $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = \Lambda_4 = 0$ поверхность представляет собой обычный параболоид и все результаты в этом случае могут быть получены из задачи качения шара по эллипсоиду с помощью предельного перехода. Приведем их здесь в явном виде.

Уравнение поверхности в этом случае имеет вид:

$$r_1 + R\gamma_1 = -b_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_3}, \quad r_2 + R\gamma_2 = -b_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_3}, \quad r_3 + R\gamma_3 = \frac{b_1 \gamma_1^2 + b_2 \gamma_2^2}{2\gamma_3^2}, \quad (22)$$

а уравнения движения (12) представляются в форме

$$\dot{\mathbf{M}} = -\frac{D}{\mu + D}(\mathbf{M}, \dot{\gamma})\gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{R\gamma_3}{\mu + D}\gamma \times (\gamma \times \mathbf{B}^i(\gamma \times \mathbf{M})),$$

где $\mathbf{B}^i = \text{diag}(b_1^{-1}, b_2^{-1}, 0)$ — вырожденная матрица.

Плотность инвариантной меры зависит только от γ_3

$$\rho = \frac{1}{\gamma_3^4}, \quad (23)$$

а квадратичный интеграл (17) записывается в форме

$$F_2 = \frac{(\gamma \times \mathbf{M}, \mathbf{B}^i(\gamma \times \mathbf{M}))}{\gamma_3^2}. \quad (24)$$

В случае же качения по возмущённому параболоиду (один из $\Lambda_i \neq 0$) система (15) не будет обладать ни дополнительным интегралом, ни мерой. Поэтому наиболее удобным инструментом численного исследования задачи является трехмерное отображение Пуанкаре. В отличие от ранее описанных задач отображение в этом случае строится не в переменных Андуайе–Депри, а в переменных (r, ω) . Это обусловлено тем, что качение шара по параболоиду не образуют группу поворотов $SO3$ из-за "незамкнутости" параболоида. Трехмерное отображение в координатах $(x_1, \omega_1, \omega_2)$ получается за счёт сечения четырехмерного фазового потока по переменной (x_2) .

При рассмотрении качения шара по параболоиду без возмущения трехмерное отображение Пуанкаре может быть редуцировано (за счёт дополнительного интеграла (24)) до двумерного (в координатах (x_1, ω_1)). В трехмерных координатах $(x_1, \omega_1, \omega_2)$ траектории системы будут расслаиваться на инвариантные кривые.

3.4.2. Параметры задачи, вынесенные в программном комплексе Chaos

Перечислим основные параметры задачи, отображаемые в программном комплексе Chaos

- *Energy* - суммарная энергия тела
- *F* - значение дополнительного интеграла (24)
- *p* - радиус кривизны параболоида по x
- *q* - радиус кривизны параболоида по y
- *R* - радиус шара
- *μ* - момент инерции шара
- *D* - значение коэффициента в уравнениях для моментов
- *mg* - вес шара
- *Initial ω₃* - начальная угловая скорость вертикального вращения
- $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$ - Параметры возмущения параболоида, описанные в (21)

3.5. Качение шара Чаплыгина с гириостатом внутри по плоскости без проскальзывания

В разделе исследуется задача качения динамически несимметричного уравновешенного шара по плоскости. В центре шара располагается гириостат, который создает дополнительный кинетический момент. Предполагается, что плоскость, по которой катится шар, абсолютно шероховатая. Это обеспечивает отсутствие проскальзывания шара в точке контакта. Подробный качественный и численный анализ поставленной задачи приведен в разделе 8 книги [2].

3.5.1. Уравнения движения, интегралы и мера

Движение шара в проекциях на главные оси, связанные с шаром, описывается системой

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = (\mathbf{M} + \mathbf{K}) \times \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \end{cases} \quad (25)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + D\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}), \quad D = ma^2,$$

где \mathbf{K} — постоянный вектор момента гириостата. Данная система допускает следующие интегралы

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}), \quad C = (\mathbf{M} + \mathbf{K}, \boldsymbol{\gamma}), \\ (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) &= 1, \quad n = (\mathbf{M} + \mathbf{K}, \mathbf{M} + \mathbf{K}). \end{aligned} \quad (26)$$

Помимо четырех интегралов рассматриваемая система обладает инвариантной мерой с плотностью

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - D(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}^{-1}\boldsymbol{\gamma})}}, \quad (27)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{I} + D\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \|\delta_{ij}\|$$

По *теореме Эйлера–Якоби* система (благодаря наличию инвариантной меры и четырех независимых интегралов (25)) интегрируема. Однако, не смотря на это, явное интегрирование задачи до сих пор не выполнено.

Для определения движения шара в абсолютном пространстве к системе (25) следует добавить уравнения для ортов неподвижной системы

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (28)$$

Большой интерес для понимания движения шара в абсолютном пространстве представляет траектория точки контакта на плоскости, которая очевидно совпадает с траекторией центра масс. Уравнение движения точки контакта можно получить из условия равенства нулю ее скорости:

$$\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (29)$$

где \mathbf{v} — скорость центра масс, $\mathbf{r} = -a\boldsymbol{\gamma}$ — вектор, соединяющий центр масс и точку контакта. Запишем уравнение (29) в проекциях на неподвижные оси координат:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha}) = a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta}), \quad \dot{\mathbf{y}} = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\beta}) = -a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}). \quad (30)$$

Вместе с (28) полученные уравнения определяют траекторию точки контакта (и центра масс) на плоскости.

Бифуркационные кривые Для задачи качения шара Чаплыгина с гириостатом внутри выполнен качественный анализ бифуркационных кривых. (см. [4]) Бифуркационная диаграмма состоит из объединения:

1) набора кривых σ

$$n(\lambda) = \lambda^2 \left(\frac{K_1^2}{(J_1 - \lambda)^2} + \frac{K_2^2}{(J_2 - \lambda)^2} + \frac{K_3^2}{(J_3 - \lambda)^2} - \frac{H^2}{(D - \lambda)^2} \right) + H^2, n > H^2, \quad (31)$$

$$2h(\lambda) = \frac{K_1^2 J_1}{(J_1 - \lambda)^2} + \frac{K_2^2 J_2}{(J_2 - \lambda)^2} + \frac{K_3^2 J_3}{(J_3 - \lambda)^2} - \frac{DH^2}{(D - \lambda)^2}. \quad (32)$$

2) отрезка σ_0 при $c=0$

$$n = 2Dh - D(I^{-1}K, K), n \in [0, D^2(I^{-1}K, I^{-1}K)], \quad (33)$$

3) луча σ_i , если $K_i = 0$,

$$n = 2J_i h - \frac{Dc^2}{I_i} - J_i \sum_{j \neq i} \frac{K_j^2}{I_j - I_i}, n \geq c^2 + J_i^2 \left(\sum_{j \neq i} \frac{K_j^2}{(I_j - I_i)^2} - \frac{H^2}{I_i^2} \right), \quad (34)$$

4) отрезка τ на прямой $n = c^2$,

5) точки T_0 : $h = 0, n = (K, K)$ при $c^2 \leq (K, K)$.

Понижение размерности системы. Двумерное отображение Пуанкаре Основным инструментом исследования поставленной задачи является двумерное отображение Пуанкаре в переменных Андуайе-Депри $(l, \frac{L}{G})$ (7), которое возникает за счёт сечения трехмерного фазового потока секущей $g = const$. Свести исходную шестимерную задачу к трехмерной позволяет использование трех интегралов: геометрического, энергии (h) и площадей (C). Технически это реализовано следующим образом: геометрический интеграл позволяет напрямую избавиться от одного уравнения, сохраняясь в переменных Андуайе-Депри автоматически, переменные $(l, \frac{L}{G})$, а также переменная сечения g задаются пользователем в параметрах отображения, а недостающие переменные $\frac{H}{G}$ и G определяются численно через интегралы h и C .

Благодаря существованию четвертого интеграла n , двумерное фазовое пространство расслаивается на инвариантные кривые, а наличие инвариантной меры исключает существование притягивающих множеств. Эти факты подтверждаются в численных экспериментах в программном комплексе Chaos.

Исследование задачи качения шара Чаплыгина с гириостатом внутри с помощью программного комплекса Chaos Программный комплекс Chaos позволяет в полном объеме численно исследовать поставленную задачу. Сначала опишем параметры задачи, вынесенные в программный комплекс, затем приведем список величин, значения которых просчитываются в процессе численного интегрирования задачи. Значения этих величин могут быть провизуализированы в виде зависимостей на двух- и трехмерных графиках. Завершим описание возможностей численного исследования качения шара Чаплыгина описанием специфичного для рассматриваемой задачи инструменты, служащего для визуализации бифуркационной диаграммы.

Для задачи качения шара Чаплыгина по плоскости реализовано две бифуркационные диаграммы в осях (n, h) и в осях $(C/n, h)$. Как отмечалось выше, бифуркационная диаграмма состоит из набора кривых, для каждой из которых предоставляется возможность задания диапазона параметров. Поэтому для отображения интересующей ветви бифуркационной кривой необходимо выбрать ее из списка (Topological analysis->Branch number). Выбранная ветвь кривой отрисовывается в визуализатор (**BifurcationPlot**) с помощью нажатия кнопки Create.

3.5.2. Параметры задачи качения шара Чаплыгина с гиростатом внутри по плоскости, вынесенные в программный комплекс

- *Energy* - суммарная энергия, передаваемая телу
- $c = (M + K, \gamma)$ - значение константы площадей (интеграл C в (26))
- I_1, I_2, I_3 - главные моменты инерции шара
- R - радиус шара
- m - масса шара
- K_1, K_2, K_3 - компоненты вектора момента гиростата
- *Step of root finding* - шаг, используемый в процедуре численного поиска корней для инициализации недостающей начальной координаты по заданным интегралам энергии и площадей
- *Accuracy of root finding* - точность нахождения корня в численной процедуре
- *Rotation of the map (vert. / horiz.)* - углы поворота отображения в вертикальной / горизонтальной плоскостях.

3.5.3. Список величин, выводимых в программном комплексе Chaos

- t - суммарное время интегрирование системы (в шагах интегрирования)
- $E = \frac{1}{2}(M, \omega)$ - Значение энергии тела
- $H = (M + K, \gamma)$ - Значение константы площадей
- $(G = |M + K|)$ - Значение переменной Депри G
- g - Значение переменной Депри g
- l - Значение переменной Депри l
- L - Значение переменной Депри L
- L/G - Значение отношения переменных Депри $\frac{L}{G}$
- $(G = |M + K|)$ - Значение переменной Депри G

- M_1, M_2, M_3 - Компоненты вектора кинетического момента
- $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ - Компоненты вектора γ
- $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ - Компоненты вектора ω
- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - Компоненты вектора α
- $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ - Компоненты вектора β
- $\phi(mod 2\pi), \psi(mod 2\pi), \theta$ - Углы Эйлера поворота системы координат, связанной с телом, относительно неподвижной системы координат
- $RabsX, RabsY$ - Координаты центра масс (точки контакта) шара в абсолютной (неподвижной системе координат)
- V_x, V_y - Скорость центра масс (точки контакта) шара в абсолютной (неподвижной системе координат)
- L on the plane - Длина следа, оставляемого шаром на плоскости
- L on the ball - Длина следа, оставляемого плоскостью на шаре
- L difference - Разница длин следов на плоскости и на шаре

Литература

- [1] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела, РХД, 2005.
- [2] Борисов А. В., Мамаев И. С. Неголономные динамические системы, РХД, 2002.
- [3] Борисов А. В., Мамаев И. С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней. Успехи физ. наук. 2003 Том 173, N4.
- [4] Москвин А. Ю. Шар Чаплыгина с гироскопом: особые решения, Нелинейная динамика, 2009, Т.5, №3, с. 345-356.
- [5] Benettin G. Galgani L. Giorgilli A. Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Meccanica. 1980. Vol. 15. pp. 9-30.

Оглавление

1.	Введение	1
2.	Описание программного комплекса Chaos	2
2.1.	Менеджер запущенных инструментов	3
2.2.	Методы интегрирования	3
2.2.1.	Метод Рунге-Кутты (Runge-Kutt method)	3
2.2.2.	Метод Мерсона (Merson method)	4
2.2.3.	Метод Эверхарта (Everhart method)	5
2.3.	Инструменты	6
2.3.1.	Отображение Пуанкаре (Tools/Poincare map)	7
2.3.2.	Спектр Фурье (Tools/Poincare map/Furier spectrum)	8
2.3.3.	Ляпуновские показатели для потока (Tools/Poincare map/Lyapunov exponents for flow)	9
2.3.4.	Поиск неподвижных точек отображения (Tools/Fixed point finding)	11
2.3.5.	Продолжение неподвижных точек по параметру (Tools/Fixed point finding/Fixed point continuation)	12
2.3.6.	Сепаратрисы (Tools/Fixed point finding/Separatrix)	13
2.3.7.	Дерево бифуркаций удвоения периода (Tools/Fixed point finding/Bifurcating tree)	14
2.3.8.	Построение поверхности $z = Map(x) - x $ (Tools/Surface $ Map(x) - x $)	15
2.3.9.	Области возможного движения (ОВД) (Tools/Region of allowable motion (RAM))	15
2.3.10.	Бифуркационные диаграммы (Tools/Topological analysis)	16
2.4.	Фильтры и дополнительные окна	17
2.4.1.	Построение двумерных графиков (Filter/2D-plot)	17
2.4.2.	Построение трехмерных графиков (Filter/3D-plot)	18
2.4.3.	Визуализация движения мультипликаторов неподвижной точки (Filter/Fixed point multipliers plot)	19
2.4.4.	Построение бифуркационных диаграмм (Filter/Bifurcation plot)	19
2.4.5.	Визуализация движения апексов (Filter/Visualization of apex motion)	20
2.4.6.	Визуализация движения тел (Filter/Visualization of task)	21
3.	Описание задач неголономной механики	22
3.1.	Качение параболоида по плоскости без проскальзывания	22
3.1.1.	Уравнения движения и интегралы	22
3.1.2.	Переменные Андуайе–Депри и трехмерные отображения Пуанкаре	23
3.1.3.	Параметры задачи, вынесенные в программном комплексе Chaos	24
3.1.4.	Список величин, выводимых в программном комплексе Chaos	25

3.2.	Качение эллипсоида по плоскости без проскальзывания	25
3.2.1.	Уравнения движения и интегралы	26
3.2.2.	Параметры задачи, вынесенные в программном комплексе Chaos	26
3.3.	Качение шара по эллипсоиду без проскальзывания	27
3.3.1.	Уравнения движения шара и интегралы	27
3.3.2.	Параметры задачи, вынесенные в программном комплексе Chaos	29
3.4.	Качения шара по возмущенному параболоиду без проскальзывания . .	29
3.4.1.	Уравнения движения и интегралы	29
3.4.2.	Параметры задачи, вынесенные в программном комплексе Chaos	30
3.5.	Качение шара Чаплыгина с гироскатом внутри по плоскости без про- скальзывания	31
3.5.1.	Уравнения движения, интегралы и мера	31
3.5.2.	Параметры задачи качения шара Чаплыгина с гироскатом внутри по плоскости, вынесенные в программный комплекс . .	33
3.5.3.	Список величин, выводимых в программном комплексе Chaos .	33
Литература	34